Université Abdelmalek Essaadi , ENSA Al Hoceima,
$1^{ére}$ Année Préparatoire , 2018-2019.

Examen d'Analyse II.
Durée : 2h.
Session juin 2019

Prof. Younes ABOUELHANOUNE

Il est demandé de rédiger avec clareté et rigueur.

Exercice 1 : (2.5pt)

On considère l'équation différentielle (L) :

$$(L): \quad \{ \; x^3y' + (2-3x^2)y = x^3$$

1. Résoudre l'équation différentielle (L).
2. Trouver la solution sur $]0;+\infty[$ vérifiant $y(1)=0$.

Exercice 2 : (6pt)

1. Étudier la convergence des séries suivantes :

$$U_1 = \sum_{n\succeq 1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)} \quad ; \quad U_2 = \sum_{n\succeq 1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n}+\cos(n)}{\ln(n)+n^2} \quad ; \quad U_3 = \sum_{n\succeq 3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2\sin(n^3)}$$

2. Calculer la somme de la série suivante :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

Exercice 3 : (7.5pt)

On considère la série de fonctions $\sum_{n\succeq 1}^{+\infty} f_n(x)$ avec

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que

$$f(x) = \sum_{n\succeq 1}^{+\infty} f_n(x)$$

   est une fonction continue.

3. Montrer que
$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n\succeq 1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

4. Calcule $f'(x)$ la dérivée de la série
$$f'(x) = \left(\sum_{n\succeq 1}^{+\infty} f_n(x)\right)'$$

5. Vérifier que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Exercice 4 : (4pt)

1. Déterminer le rayon de convergence des série entières de terme généraux :
$$a_n = \left(\cos(\tfrac{1}{n})\right)^n \ ; \quad b_n = \ln\left(1+\tfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$ par
$$f(x) = \frac{1}{-x^2+x+2}$$

   a- Développer la fonction $f(x)$ en série entière au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence R.

   b- Quel est le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ?